UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

FÓRMULAS DE WILBUR

ELABORADO POR

ING. DAVID GUTIÉRREZ CALZADA

ABRIL DE 2016

ÍNDICE

Introducción 3

Desarrollo del tema 4

BIBLIOGRAFÍA 14

INTRODUCCIÓN

El presente documento contiene el desarrollo escrito del tema *Obtención de rigideces laterales por el método de Wilbur*; tema que forma parte de la unidad 2, *Ingeniería Sísmica*, dentro del programa de estudio de la unidad de aprendizaje de Análisis Estructural 2. El alcance de este trabajo es mostrar como utilizar el método.

El tiempo dedicado al desarrollo en el aula del tema abordado es de una sesión de dos horas. Destinando el tiempo para la teoría fundamental y para ejercicios. Cabe aclarar que en el desarrollo de los ejercicios se hace nuevamente referencia a la parte teórica fundamental.

DESARROLLO DEL TEMA

FÓRMULAS DE WILBUR

Considerando un modelo matemático idealizado a base de masas y resortes *(Figura 1),* concentrando la masa en las losas de cada entrepiso, (puesto que tienen la mayor cantidad de peso concentrado en la losa en cada piso) y entendiendo como la ***rigidez de entrepiso*** o ***rigidez lateral*** a la relación entre el cortante absorbido por un marco en un piso determinado y el desplazamiento relativo entre dos niveles consecutivos *(Figura 2)*.

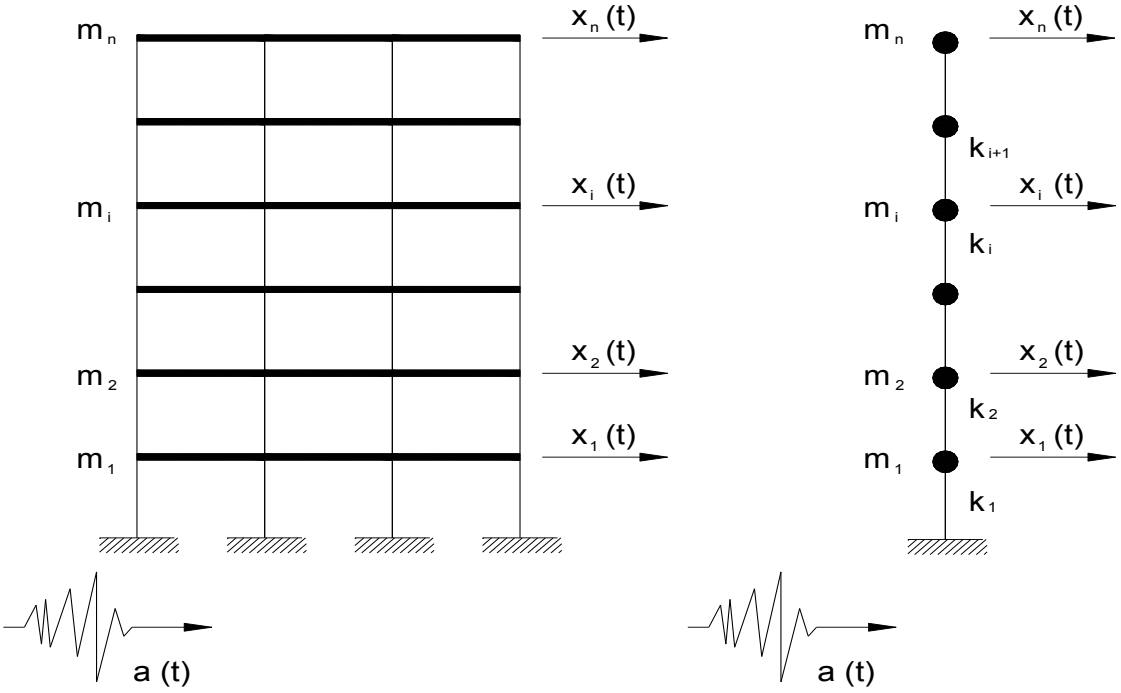


Figura 1. Modelo de masas y resortes sin amortiguamiento

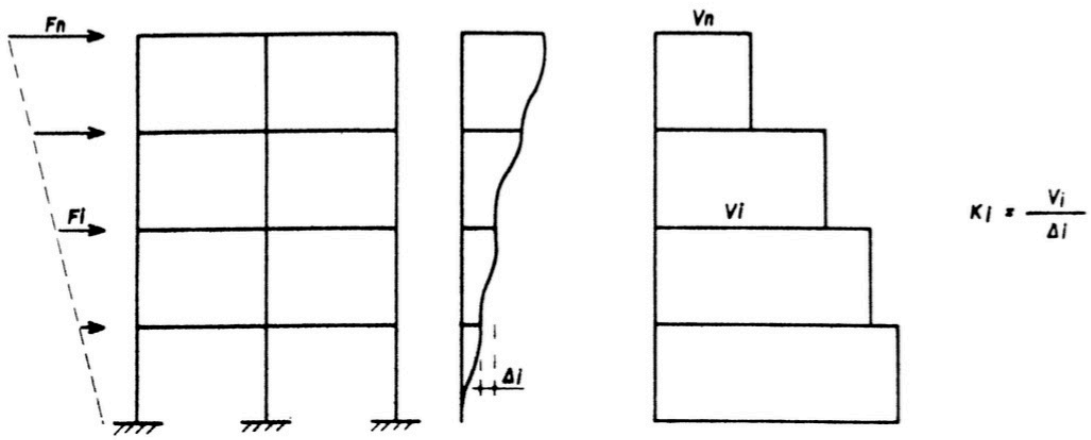


Figura 2. Rigidez lateral o de entrepiso

De acuerdo a esto, se pueden definir dos tipos de estructuras: *estructuras de cortante* (sistema estrecha o cercanamente acoplado) donde la rigidez de entrepiso es independiente de la distribución de cargas laterales *(Figura 3a)* y *estructuras de flexión* (sistema remotamente acoplado) donde no existe independencia entre la rigidez de entrepiso y la distribución de cargas aplicadas *(Figura 3b)*.

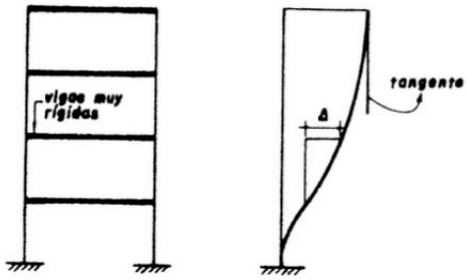


Fig. 3a. Estructura de cortante

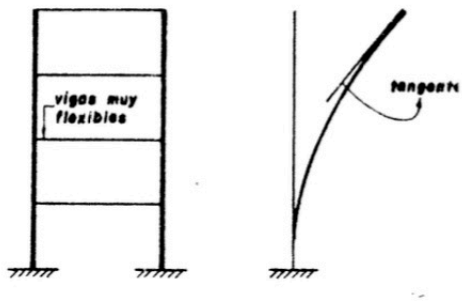


Fig. 3b. Estructura de flexión

Obsérvense los diagramas de momentos flexionantes en las columnas de un marco, para los casos extremos y un intermedio, en las figuras 4a, 4b y 4c. Es importante hacer notar que la mayoría de las estructuras se encuentran en una parte intermedia así como también es importante destacar que la aplicación de métodos aproximados para la obtención de momentos en vigas y columnas sin verificar la situación real de los marcos, puede conducir a errores importantes de subestimación de momentos flexionantes en las columnas y de desplazamientos horizontales en la estructura.

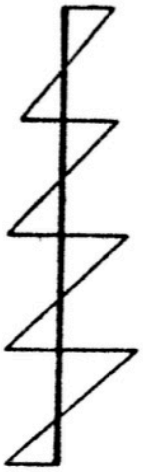


Fig. 4a. Momentos flexionantes en una estructura con sistema estructural a base de marcos con vigas muy rígidas comparada con las columnas.

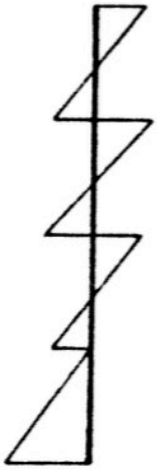


Fig. 4b. Momentos flexionantes en una estructura con sistema estructural a base de marcos en una situación intermedia.

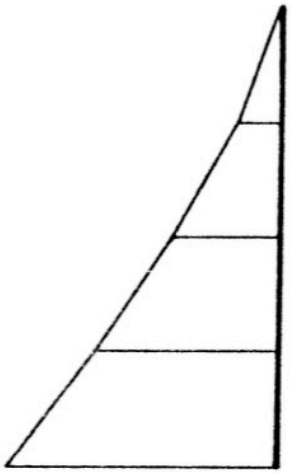


Fig. 4c. Momentos flexionantes en una estructura con sistema estructural a base de marcos con vigas muy flexibles comparada con las columnas

Una forma de conocer si la estructura es de cortante o de flexión, es utilizando el parámetro ρ, denominado índice de rotación, el cuál se puede evaluar en cualquier piso y se define por la relación:

$$\rho = \frac{\sum I_v / l}{\sum I_c / h}$$

$\sum I_v / l =$ suma de las rigideces relativas de las vigas de un nivel

$\sum I_c / h =$ suma de las rigideces relativas de las columnas en que se apoyan las vigas

Si $\rho > 0.10$, entonces hay puntos de momento nulo en las columnas de todos los pisos, por lo tanto es aceptable suponer que la estructura en cuestión es de cortante. Para valores de $\rho < 0.01$, la estructura se asemeja a una de flexión. Por último, para $0.01 \leq \rho \leq 0.10$, la situación es intermedia y habrá pisos donde las columnas no tienen puntos de momento nulo, por lo que los métodos aproximados de análisis pueden conducir a apreciables errores del lado de la inseguridad. Por lo que, se aconseja utilizar métodos matriciales, por ejemplo el de rigideces y posteriormente obtener las *rigideces de entrepiso (rigidez lateral)* por otros métodos como el de condensación estática.

Las fórmulas de Wilbur para calcular las rigideces de entrepiso sólo son aplicables al caso de estructuras de cortante (en los que las deformaciones axiales son despreciables y las columnas tienen puntos de inflexión) , es decir, marcos regulares constituidos por elementos estructurales de sección transversal constante (momentos de inercia constantes) .

Este método tiene las siguientes hipótesis:

1. Los giros en todos los nudos de un nivel y de los dos niveles adyacentes son iguales, excepto en el nivel de desplante, en donde puede suponerse empotramiento o articulación, según sea el caso.
2. Las cortantes en los dos entrepisos adyacentes al de interés son iguales al de éste.

A partir de las hipótesis anteriores se desprende lo siguiente:

Primer entrepiso

a) Columnas empotradas en la cimentación

$$R_1 = \frac{48E}{h_1\left[\frac{4h_1}{\Sigma Kc_1} + \frac{h_1 + h_2}{\Sigma Kv_1 + \frac{\Sigma Kc_1}{12}}\right]}$$

b) Columnas articuladas en la cimentación

$$R_1 = \frac{24E}{h_1\left[\frac{8h_1}{\Sigma Kc_1} + \frac{2h_1 + h_2}{\Sigma Kv_1}\right]}$$

Segundo entrepiso

a) Columnas empotradas en la cimentación

$$R_2 = \frac{48E}{h_2\left[\frac{4h_2}{\Sigma k_{c2}} + \frac{h_1 + h_2}{\Sigma k_{v1} + \frac{\Sigma k_{c1}}{12}} + \frac{h_2 + h_3}{\Sigma k_{v2}}\right]}$$

b) Columnas articuladas en la cimentación

$$R_2 = \frac{48E}{h_2\left[\frac{4h_2}{\Sigma Kc_2} + \frac{2h_1 + h_2}{\Sigma Kv_1} + \frac{h_2 + h_3}{\Sigma Kv_2}\right]}$$

Entrepisos intermedios

$$R_n = \frac{48E}{h_n\left[\frac{4h_n}{\Sigma Kc_n} + \frac{h_{n-1} + h_n}{\Sigma Kv_{n-1}} + \frac{h_n + h_{n+1}}{\Sigma Kv_n}\right]}$$

Para el último entrepiso, si se acepta la suposición de que el cortante del penúltimo entrepiso es el doble que el último, se puede utilizar la fórmula para entrepisos intermedios, poniendo $2h_{n-1}$ en vez de h_{n-1} y haciendo $h_{n+1} = 0$.

Donde:

R_n = Rigidez del n-ésimo entrepiso

E = Módulo de elasticidad

$Kv_n = Iv/Lv$ = Rigidez relativa de las vigas del nivel sobre el n-ésimo entrepiso.

$Kc_n = Ic/Lc$ = Rigidez relativa de las columnas del n-ésimo entrepiso.

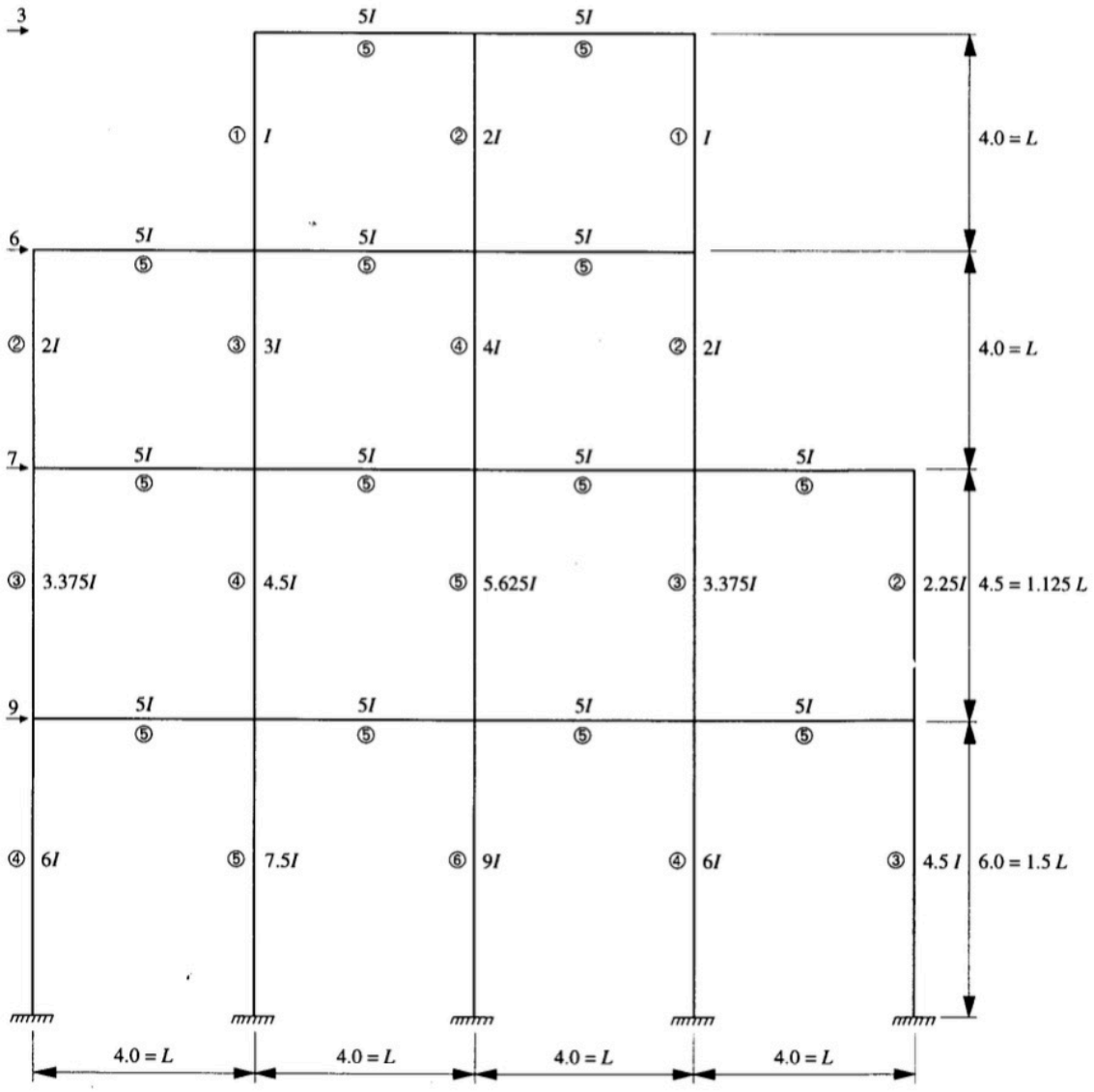
h_n = Altura del n-ésimo entrepiso.

$n-1, n, n+1$ = Índices que identifican tres niveles consecutivos (de abajo hacia arriba).

Ejemplo

Obtenga las rigideces de entrepiso del marco mostrado utilizando las fórmulas de wilbur y comparelas con las que se obtienen al utilizar la aproximación

$$K_n = \sum \frac{12 * E * Ic_n}{Lc_n^{\,3}}.$$



Fuerzas en toneladas y longitudes en metros
I = 7 500 cm^4 E = 2 000 000 kg/cm^2
O Rigidez (inercia/longitud) en términos de I/L

Solución

Utilizando las fórmulas de wilbur, considerando empotramiento en la base.

Datos generales

E=	2,000,000.00	kg/cm^2
L=	400.00	cm
I=	7,500.00	cm^4

Primer entrepiso

Columna	Ic $[cm^4]$	Lc [cm]	Ic/Lc $[cm^4/cm]$	$12*Ic/Lc^3$ [kg/cm]
c1	45,000.00	600.00	75.00	0.002500
c2	56,250.00	600.00	93.75	0.003125
c3	67,500.00	600.00	112.50	0.003750
c4	45,000.00	600.00	75.00	0.002500
c5	33,750.00	600.00	56.25	0.001875
	ΣKc=Suma Ic/Lc(1)=		**412.50** cm^4/cm	**0.013750**

Viga	Iv $[cm^4]$	Lv [cm]	Iv/Lv $[cm^4/cm]$
v1	37,500.00	400.00	93.75
v2	37,500.00	400.00	93.75
v3	37,500.00	400.00	93.75
v4	37,500.00	400.00	93.75
	ΣKv=Suma Iv/Lv(1)=		**375.00** cm^4/cm

Segundo entrepiso

Columna	Ic [cm^4]	Lc [cm]	Ic/Lc [cm^4/cm]	$12*Ic/Lc^3$ [kg/cm]
c1	25,312.50	450.00	56.25	0.003333
c2	33,750.00	450.00	75.00	0.004444
c3	42,187.50	450.00	93.75	0.005556
c4	25,312.50	450.00	56.25	0.003333
c5	16,875.00	450.00	37.50	0.002222
		ΣKc=Suma Ic/Lc(2)=	**318.75** cm^4/cm	**0.018889**

Viga	Iv [cm^4]	Lv [cm]	Iv/Lv [cm^4/cm]
v1	37,500.00	400.00	93.75
v2	37,500.00	400.00	93.75
v3	37,500.00	400.00	93.75
v4	37,500.00	400.00	93.75
		ΣKv=Suma Iv/Lv(2)=	**375.00** cm^4/cm

Tercer entrepiso

Columna	Ic [cm^4]	Lc [cm]	Ic/Lc [cm^4/cm]	$12*Ic/Lc^3$ [kg/cm]
c1	15,000.00	400.00	37.50	0.002813
c2	22,500.00	400.00	56.25	0.004219
c3	30,000.00	400.00	75.00	0.005625
c4	15,000.00	400.00	37.50	0.002813
		ΣKc=Suma Ic/Lc(3)=	**206.25** cm^4/cm	**0.015469**

Viga	Iv [cm^4]	Lv [cm]	Iv/Lv [cm^4/cm]
v1	37,500.00	400.00	93.75
v2	37,500.00	400.00	93.75
v3	37,500.00	400.00	93.75
		ΣKv=Suma Iv/Lv(3)=	**281.25** cm^4/cm

Cuarto entrepiso

Columna	Ic [cm^4]	Lc [cm]	Ic/Lc [cm^4/cm]	$12*Ic/Lc^3$ [kg/cm]
c1	7,500.00	400.00	18.75	0.001406
c2	15,000.00	400.00	37.50	0.002813
c3	7,500.00	400.00	18.75	0.001406
		ΣKc=Suma Ic/Lc(3)=	**75.00** cm^4/cm	**0.005625**

Viga	Iv [cm^4]	Lv [cm]	Iv/Lv [cm^4/cm]
v1	37,500.00	400.00	93.75
v2	37,500.00	400.00	93.75
		ΣKv=Suma Iv/Lv(3)=	**187.50** cm^4/cm

Tabla de resultados

N	h_n [cm]	E [kg/cm^2]	h_{n-1} [cm]	h_n [cm]	h_{n+1} [cm]	ΣKc [cm^4/cm]	ΣKv [cm^4/cm]	$Rn_{empotrada}$ [kg/cm]	$12*Ec*Ic/Lc^3$ [kg/cm]	Diferencia [%]
1	600	2,000,000	-	600	450	412.50	375.00	19,086.09	27,500.00	44.08
2	450	2,000,000	600	450	400	318.75	375.00	20,358.93	37,777.78	85.56
3	400	2,000,000	450	400	400	206.25	281.25	18,649.92	30,937.50	65.89
4	400	2,000,000	400	400	-	75.00	187.50	8,653.85	11,250.00	30.00

Por lo que las rigideces de entrepiso quedan como:

$K_1 = 19{,}086.09\ kg/cm$

$K_2 = 20{,}358.93\ kg/cm$

$K_3 = 18{,}649.92\ kg/cm$

$K_4 = 8{,}653.85\ kg/cm$

Es importante hacer notar que ambos métodos son aproximados y puede conducir a errores sobreestimando la rigidez de entrepiso, por lo que puede cambiar el periodo y las frecuencias de manera apreciable. Para una obtención más racional de las rigideces de entrepiso se puede utilizar una condensación estática en combinación con el método matricial de rigideces.

BIBLIOGRAFÍA

Aranda, Luis (1990). Análisis sísmico, Apuntes para clase. UANL. México.

Casal, Julio (1987). Métodos para el análisis de estructuras sujetas a fuerzas sísmicas laterales, Instituto Nacional de Prevención Sísmica, Argentina.

Bazan, Meli (2004). Diseño sísmico de edificios, Limusa, México, D.F.