Ejercicio:
Una masa de 1 kilogramo se fi ja a un resorte cuya constante es 16 N/m y luego el sistema completo se sumerge en un líquido que imparte una fuerza amortiguadora igual a 10 veces la velocidad instantánea.
Determine las ecuaciones de movimiento si:

a) al inicio la masa se libera desde un punto situado 1 metro abajo de la posición de equilibrio, y luego
b) la masa se libera inicialmente desde un punto 1 me tro abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 12 m/s.

Solución:
Datos

$$m = 1kg$$
$$k = 16N/m$$
$$c = 10N.s/m$$

La ecuación diferencial de movimiento es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$
$$\ddot{x} + 10\dot{x} + 16x = 0$$

Obsérvese que $\frac{k}{m} = 16$ y $\frac{c}{m} = 10$
Las raíces son

$$\lambda = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = \frac{-10}{2(1)} \pm \sqrt{\frac{10^2}{4(1)^2} - \frac{16}{(1)}} = -5 \pm 3$$
$$\lambda_1 = -2 \text{ y } \lambda_2 = -8$$

La solución de la ecuación es de la forma:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_1 t}$$
$$\boxed{x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t}}$$

a) al inicio la masa se libera desde un punto situado 1 metro abajo de la posición de equilibrio

$$x(0) = 1m$$
$$\dot{x}(0) = 0m/s$$

Como

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t}$$
$$\dot{x}(t) = -2C_1 e^{-2t} - 8C_2 e^{-8t}$$

Por lo que

$$x(0) = 1 = C_1 e^{-2(0)} + C_2 e^{-8(0)} = C_1 + C_2 = 1$$
$$\dot{x}(0) = 0 = -2C_1 e^{-2(0)} - 8C_2 e^{-8(0)} = -2C_1 - 8C_2 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$C_1 = 1 - C_2$$
$$-2C_1 - 8C_2 = -2(1 - C_2) - 8C_2 = -2 - 6C_2 = 0$$

Por lo que: $C_2 = \frac{-1}{3}$ y $C_1 = \frac{4}{3}$
Y la ecuación de movimiento queda como $x(t) = \frac{4}{3} e^{-2t} + \frac{-1}{3} e^{-8t}$

b) la masa se libera inicialmente desde un punto 1 metro abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 12 m/s

$$x(0) = 1m$$
$$\dot{x}(0) = -12m/s$$

Como

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t}$$
$$\dot{x}(t) = -2C_1 e^{-2t} - 8C_2 e^{-8t}$$

Por lo que

$$x(0) = 1 = C_1 e^{-2(0)} + C_2 e^{-8(0)} = C_1 + C_2 = 1$$
$$\dot{x}(0) = -12 = -2C_1 e^{-2(0)} - 8C_2 e^{-8(0)} = -2C_1 - 8C_2 = -12$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$C_1 = 1 - C_2$$
$$-2C_1 - 8C_2 = -2(1 - C_2) - 8C_2 = -2 - 6C_2 = -12$$

Por lo que: $C_2 = \frac{5}{3}$ y $C_1 = \frac{-2}{3}$
Y la ecuación de movimiento queda como $x(t) = \frac{-2}{3} e^{-2t} + \frac{5}{3} e^{-8t}$