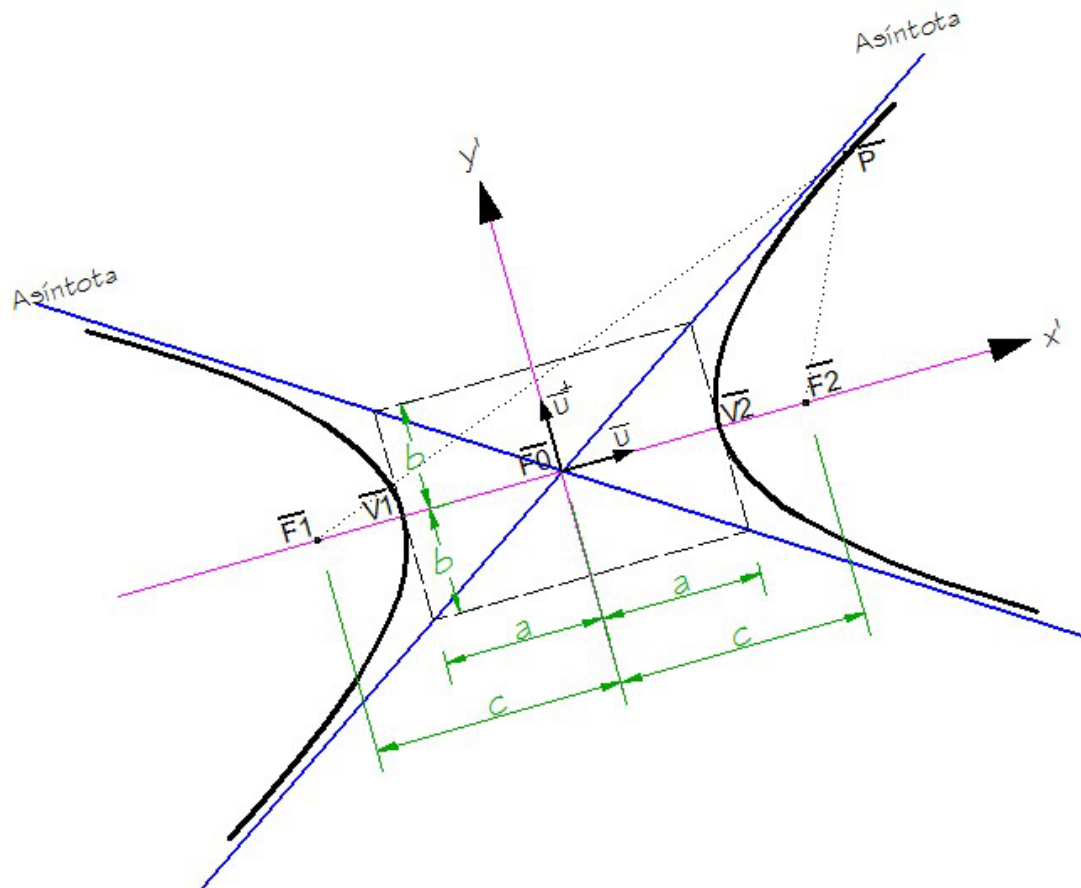


HIPÉRBOLA.

Es el conjunto de todos los puntos con la propiedad de que la diferencia de las distancias de los puntos del conjunto a dos puntos fijos dados es una constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

La hipérbola se puede representar por el siguiente esquema.



Las componentes principales de la hipérbola se pueden obtener de la figura anterior, las cuales son:

Focos:

$$\bar{F}_2 = \bar{F}_0 + c \bar{u}$$

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_0 - c \bar{u}$$

Vértices:

$$\bar{V}_2 = \bar{F}_0 + a \bar{u}$$

$$\bar{V}_1 = \bar{F}_0 - a \bar{u}$$

$$\bar{B}_2 = \bar{F}_0 + b \bar{u}^\perp$$

$$\bar{B}_1 = \bar{F}_0 - b \bar{u}^\perp$$

Centro:

$$\overline{F_0} = \frac{1}{2}(\overline{F_1} + \overline{F_2}) = \frac{1}{2}(\overline{V_1} + \overline{V_2})$$

La recta que pasa por los focos se denomina *eje focal*. La recta que pasa por el centro de la hipérbola perpendicular al eje focal se llama *eje normal*.

El segmento de la recta que va de $\overline{V_1}$ a $\overline{V_2}$ se llama *eje transverso*.

El segmento de la recta cuyo punto medio es el centro de la hipérbola y tiene longitud $2b$, se llama *eje conjugado*.

El segmento de la recta que va desde un punto de la hipérbola a otro punto de la hipérbola y que pasa por uno de los focos, perpendicular al eje focal se llama *lado recto*.

Sea un punto P que pertenezca a la hipérbola, entonces cumple con:

$$\overline{P} = \overline{F_0} + x'\overline{u} + y'\overline{u}^\perp$$

y de la definición de la hipérbola:

$$|\overline{P} - \overline{F_1}| - |\overline{P} - \overline{F_2}| = 2a \quad \text{con} \quad 0 < a < c$$

Donde la constante es $2a$, por conveniencia, como se verá más adelante.

Como ya se conoce $\overline{F_1}, \overline{F_2}$ y $\overline{P}$ se sustituyen en la definición anterior:

$$|\overline{P} - \overline{F_1}| = \left| (\overline{F_0} + x'\overline{u} + y'\overline{u}^\perp) - (\overline{F_0} - c\overline{u}) \right| = |x'\overline{u} + y'\overline{u}^\perp + c\overline{u}|$$

$$|\overline{P} - \overline{F_1}| = |(x' + c)\overline{u} + y'\overline{u}^\perp|$$

$$|\overline{P} - \overline{F_2}| = \left| (\overline{F_0} + x'\overline{u} + y'\overline{u}^\perp) - (\overline{F_0} + c\overline{u}) \right| = |x'\overline{u} + y'\overline{u}^\perp - c\overline{u}|$$

$$|\overline{P} - \overline{F_2}| = |(x' - c)\overline{u} + y'\overline{u}^\perp|$$

Obteniendo las magnitudes, sabiendo que la magnitud de $\overline{u} \wedge \overline{u}^\perp$ es igual a uno,

$$|\overline{P} - \overline{F_1}| = \sqrt{(x' + c)^2 + y'^2}$$

$$|\overline{P} - \overline{F_2}| = \sqrt{(x' - c)^2 + y'^2}$$

Sustituyendo en la definición de la hipérbola:

$$|\overline{P} - \overline{F_1}| - |\overline{P} - \overline{F_2}| = 2a$$

$$\sqrt{(x'+c)^2 + y'^2} - \sqrt{(x'-c)^2 + y'^2} = 2a$$

Quitando el radical de ambos términos, elevando al cuadrado y después de simplificar la expresión:

$$(x'+c)^2 + y'^2 = \left(2a + \sqrt{(x'-c)^2 + y'^2}\right)^2$$

⋮

$$(a^2 - c^2)x'^2 + a^2y'^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Dividiendo ambos miembros entre $a^2(a^2 - c^2)$:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

como $0 < a < c$, $a^2 - c^2 < 0$ y definiendo $a^2 - c^2 = -b^2$, ($b > 0$) por lo que:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Por lo que la ecuación de la hipérbola está dada por:

$$\overline{P} = \overline{F_0} + x'\overline{u} + y'\overline{u}^\perp \quad \text{donde} \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Que es conocida como la ecuación vectorial de la hipérbola.

Los parámetros son x' y y' , y la ecuación $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$, se puede entender como la variación del parámetro.

Para obtener la ecuación cartesiana de la hipérbola lo que se puede hacer es:

de la ecuación $\overline{P} = \overline{F_0} + x'\overline{u} + y'\overline{u}^\perp$ ordenarla como,

$$\overline{P} - \overline{F_0} = x'\overline{u} + y'\overline{u}^\perp$$

Para obtener x' , se multiplica por el vector $\overline{u}$

$$(\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u} = (x'\overline{u} + y'\overline{u}^\perp) \cdot \overline{u}$$

$$(\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u} = (x'\overline{u} \cdot \overline{u} + y'\overline{u}^\perp \cdot \overline{u})$$

$$(\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u} = x'(\overline{u} \cdot \overline{u}) + y'(\overline{u}^\perp \cdot \overline{u})$$

como $(\overline{u}^\perp \cdot \overline{u}) = 0$ por ser ortogonales, y $(\overline{u} \cdot \overline{u}) = |\overline{u}|^2 = 1$, entonces,

$$(\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u} = x'$$

Y para obtener y' , se multiplica por el vector $\overline{u}^\perp$

$$(\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u}^\perp = (x' \overline{u} + y' \overline{u}^\perp) \cdot \overline{u}^\perp$$

$$(\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u}^\perp = (x' \overline{u} \cdot \overline{u}^\perp + y' \overline{u}^\perp \cdot \overline{u}^\perp)$$

$$(\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u}^\perp = x'(\overline{u} \cdot \overline{u}^\perp) + y'(\overline{u}^\perp \cdot \overline{u}^\perp)$$

como $(\overline{u} \cdot \overline{u}^\perp) = 0$ por ser ortogonales, y $(\overline{u}^\perp \cdot \overline{u}^\perp) = |\overline{u}^\perp|^2 = 1$, entonces,

$$(\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u}^\perp = y'$$

Sustituyendo en $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$, se obtiene la ecuación cartesiana de la hipérbola

$$\frac{((\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u})^2}{a^2} - \frac{((\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u}^\perp)^2}{b^2} = 1$$

Otra manera de obtener unas ecuaciones paramétricas es, que se observa que se puede utilizar una identidad en la ecuación vectorial de la hipérbola, es decir:

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 \qquad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Por lo que,

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = \left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

es decir,

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 = \sec^2 \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{x'}{a} = \sec \theta$$

$$\left(\frac{y'}{b}\right)^2 = \tan^2 \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{b} = \tan \theta$$

obteniéndose las siguientes dos relaciones:

$$x' = a \sec \theta$$

$$y' = b \tan \theta$$

y sustituyendo en $\overline{P} = \overline{F}_0 + x' \overline{u} + y' \overline{u}^\perp$, se obtiene otra ecuación vectorial de la hipérbola,

$$\overline{P} = \overline{F}_0 + x' \overline{u} + y' \overline{u}^\perp = (h, k) + a \sec \theta (u_1, u_2) + b \tan \theta (-u_2, u_1) / \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$$

Unas ecuaciones paramétricas,

$$\begin{aligned} x' &= h + a \sec \theta u_1 - b \tan \theta u_2 \\ y' &= k + a \sec \theta u_2 + b \tan \theta u_1 \end{aligned} ; \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$$

A partir de los vectores se pueden determinar los elementos de la hipérbola como:

Centro:

$$\overline{F}_0 = (h, k)$$

Focos:

$$\overline{F}_2 = \overline{F}_0 + c \overline{u} = (h, k) + c(u_1, u_2)$$

$$\overline{F}_1 = \overline{F}_0 - c \overline{u} = (h, k) - c(u_1, u_2)$$

Vértices:

$$\overline{V}_2 = \overline{F}_0 + a \overline{u} = (h, k) + a(u_1, u_2)$$

$$\overline{V}_1 = \overline{F}_0 - a \overline{u} = (h, k) - a(u_1, u_2)$$

$$\overline{B}_2 = \overline{F}_0 + b \overline{u}^\perp = (h, k) + b(-u_2, u_1)$$

$$\overline{B}_1 = \overline{F}_0 - b \overline{u}^\perp = (h, k) - b(-u_2, u_1)$$

Relacionados por: $a^2 + b^2 = c^2$

El segmento $\overline{V}_1 \overline{V}_2$ de longitud $2a$ se llama EJE TRANSVERSO.

El segmento de longitud $2b$, con punto medio en el centro de la parábola se llama EJE CONJUGADO.

Los ejes no se llaman mayor o menor, ya que puede ocurrir que $b > a$, $b = a$ o $b < a$.

Longitud del eje transversal: $2a$

Longitud del eje conjugado: $2b$

Longitud del lado recto: $L.R. = \frac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ como $c > a$, entonces $e > 1$ (Para el caso de la hipérbola)

Las asíntotas se obtienen por:

La ecuación de las rectas asíntotas es: $L = \bar{P}_0 + t\bar{a}$

Para la primer asíntota: $L = \{(x', y') = (0, 0) + t(1, m) / t \in \mathbb{R}\}$

La razón del punto (0,0) es porque pasa por el origen de $X' \wedge Y'$.

La pendiente de la recta asíntota es: $m = \frac{b}{a} \Rightarrow \left(1, \frac{b}{a}\right) \text{ ó } (a, b)$

$L = \{(x', y') = t(a, b) / t \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned} x' &= at \\ y' &= bt \end{aligned} ; t \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo en: $\bar{P} = \bar{F}_0 + x'\bar{u} + y'\bar{u}^\perp$

$$\bar{P} = \bar{F}_0 + (at)\bar{u} + (bt)\bar{u}^\perp / t \in \mathbb{R}$$

$$x = h + atu_1 - btu_2$$

$$y = k + atu_2 + btu_1$$

Eliminando t se obtiene la cartesiana.

Para la segunda asíntota: $L = \{(x', y') = (0, 0) + t(1, m) / t \in \mathbb{R}\}$

La razón del punto (0,0) es porque pasa por el origen de $X' \wedge Y'$.

La pendiente de la recta asíntota es: $m = \frac{-b}{a} \Rightarrow \left(1, \frac{-b}{a}\right) \text{ ó } (a, -b)$

$L = \{(x', y') = t(a, -b) / t \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned} x' &= at \\ y' &= -bt \end{aligned} ; t \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo en: $\bar{P} = \bar{F}_0 + x'\bar{u} + y'\bar{u}^\perp$

$$\overline{P} = \overline{F_0} + (at)\overline{u} + (-bt)\overline{u}^\perp / t \in \mathbb{R}$$

$$x = h + atu_1 + btu_2$$

$$y = k + atu_2 - btu_1$$

Eliminando t se obtiene la cartesiana.

CASOS PARTICULARES

- 1) Si $\overline{u} = (1, 0)$, entonces los focos están sobre una recta paralela al eje x .

Sustituyendo $\overline{u} \wedge \overline{u}^\perp$ en las ecuaciones de la hipérbola:

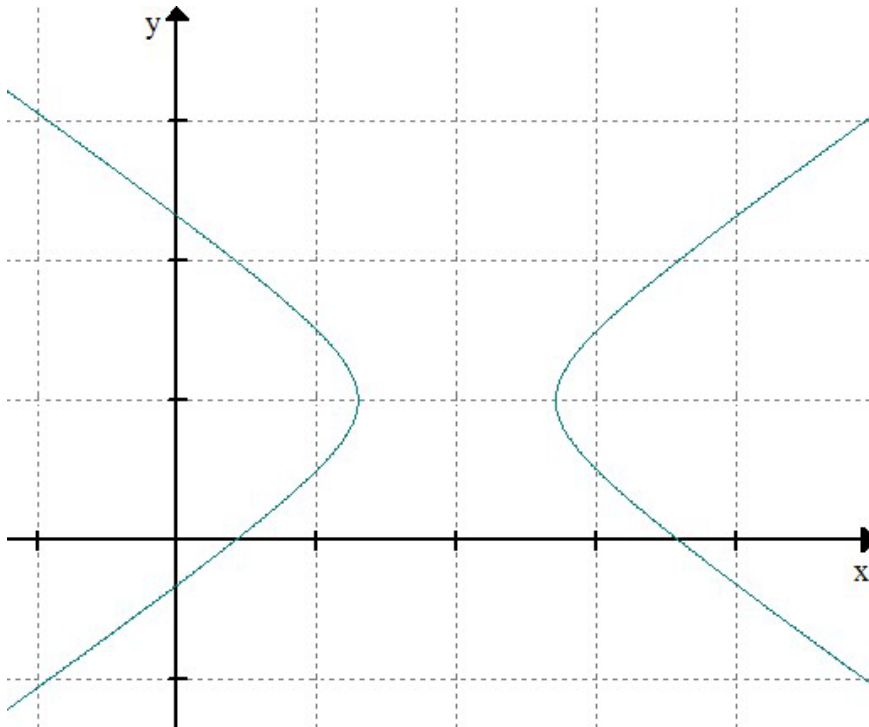
$$\overline{P} = (x, y) = (h, k) + x'(1, 0) + y'(0, 1) \quad \text{donde} \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

$$x = h + x' \Rightarrow x' = x - h$$

$$y = k + y' \Rightarrow y' = y - k$$

sustituyendo:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



- 2) Si $\overline{u} = (0, 1)$, entonces los focos están sobre una recta paralela al eje y .

Sustituyendo $\bar{u} \wedge \bar{u}^\perp$ en las ecuaciones de la hipérbola:

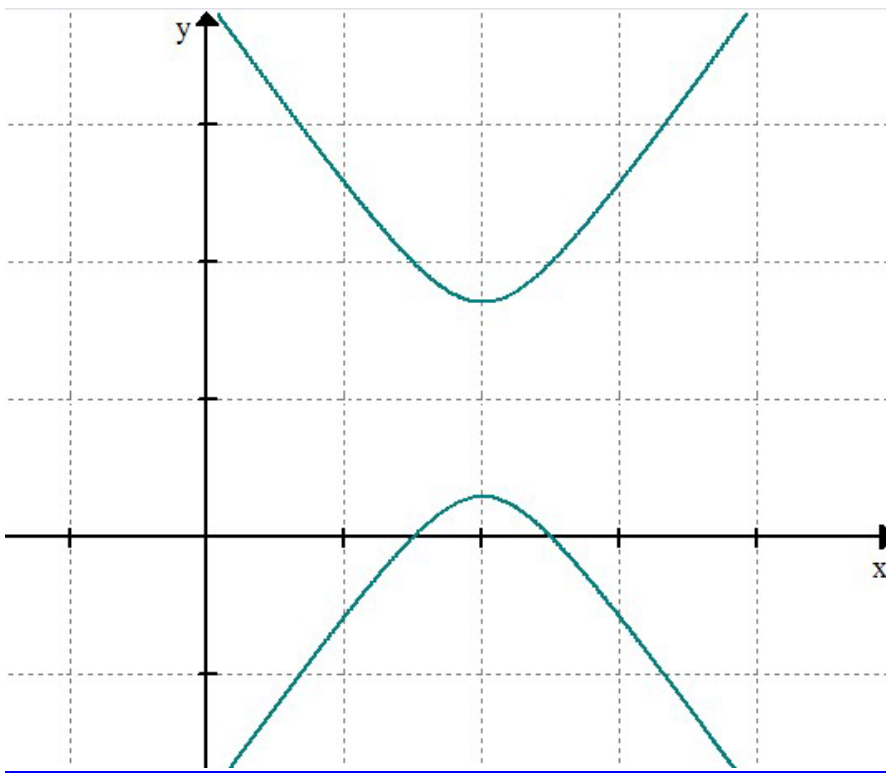
$$\bar{P} = (x, y) = (h, k) + x'(0, 1) + y'(-1, 0) \quad \text{donde} \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

$$x = h - y' \Rightarrow y' = h - x$$

$$y = k + x' \Rightarrow x' = y - k$$

sustituyendo:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = \frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(h - x)^2}{b^2} = \frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$



Ejemplo:

Determinar la ecuación vectorial, cartesiana y unas paramétricas de la hipérbola que tiene uno de sus focos en $\bar{F}_1 = (3, 0)$ y el centro en $\bar{F}_0 = (0, 1)$ y la excentricidad vale 2. Dibuje.

Solución:

Revisando la excentricidad, $e > 1$, la cual es 2, y es de acuerdo a la hipérbola.

Y como el vector $\bar{u}$ es paralelo al vector que va del centro al foco 1. ($\bar{u}$ es unitario)

$$\bar{u} = \frac{1}{|\overline{F_0 F_1}|} \overline{F_0 F_1}$$

$$\overline{F_0 F_1} = \overline{F_1} - \overline{F_0} = (3, 0) - (0, 1) = (3, -1)$$

$$|\overline{F_0 F_1}| = |\overline{F_1} - \overline{F_0}| = |(3, 0) - (0, 1)| = |(3, -1)| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

Por lo que,

$$\bar{u} = \frac{1}{|\overline{F_0 F_1}|} \overline{F_0 F_1} = \frac{1}{\sqrt{10}} (3, -1) = \frac{\sqrt{10}}{10} (3, -1) = \left(\frac{3}{10} \sqrt{10}, \frac{-1}{10} \sqrt{10} \right)$$

y un vector ortogonal a $\bar{u}$,

$$\bar{u}^\perp = \left(\frac{1}{10} \sqrt{10}, \frac{3}{10} \sqrt{10} \right)$$

y la longitud de cualquiera de los focos al centro es c ,

$$c = |\overline{F_0 F_1}| = |\overline{F_1} - \overline{F_0}| = |(3, 0) - (0, 1)| = |(3, -1)| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

la excentricidad es: $e = \frac{c}{a} = 2$

es decir, $a = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

y con la relación $c^2 = a^2 + b^2$

$$b^2 = c^2 - a^2 = (\sqrt{10})^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2} \right)^2 = \frac{15}{2}$$

$$b = \sqrt{\frac{15}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

Resumiendo, $a = \frac{\sqrt{10}}{2}, b = \frac{\sqrt{30}}{2}, c = \sqrt{10}$

La ecuación vectorial de la hipérbola es de acuerdo como,

$$\overline{P} = \overline{F_0} + x'\overline{u} + y'\overline{u}^\perp \quad \text{donde} \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

$$\overline{P} = \overline{F_0} + x'\overline{u} + y'\overline{u}^\perp = (0,1) + x'\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right) + y'\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \quad \text{donde} \quad \frac{x'^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y'^2}{\frac{15}{2}} = 1$$

y para obtener la ecuación cartesiana, obtenemos x' y y' , por medio de,

Para obtener x' , se multiplica por el vector $\overline{u}$

$$(\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u} = (x'\overline{u} + y'\overline{u}^\perp) \cdot \overline{u}$$

$$(\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u} = (x'\overline{u} \cdot \overline{u} + y'\overline{u}^\perp \cdot \overline{u})$$

$$(\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u} = x'(\overline{u} \cdot \overline{u}) + y'(\overline{u}^\perp \cdot \overline{u})$$

como $(\overline{u}^\perp \cdot \overline{u}) = 0$ por ser ortogonales, y $(\overline{u} \cdot \overline{u}) = |\overline{u}|^2 = 1$, entonces,

$$(\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u} = x'$$

$$x' = (\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u} = [(x, y) - (0, 1)] \cdot \left(\frac{3}{10}\sqrt{10}, -\frac{1}{10}\sqrt{10}\right) =$$

$$x' = (x, y - 1) \cdot \left(\frac{3}{10}\sqrt{10}, -\frac{1}{10}\sqrt{10}\right) = (x)\left(\frac{3}{10}\sqrt{10}\right) + (y - 1)\left(-\frac{1}{10}\sqrt{10}\right) =$$

$$x' = \frac{3}{10}\sqrt{10}x - \frac{1}{10}\sqrt{10}y + \frac{1}{10}\sqrt{10}$$

Y para obtener y' , se multiplica por el vector $\overline{u}^\perp$

$$(\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u}^\perp = (x'\overline{u} + y'\overline{u}^\perp) \cdot \overline{u}^\perp$$

$$(\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u}^\perp = (x'\overline{u} \cdot \overline{u}^\perp + y'\overline{u}^\perp \cdot \overline{u}^\perp)$$

$$(\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u}^\perp = x'(\overline{u} \cdot \overline{u}^\perp) + y'(\overline{u}^\perp \cdot \overline{u}^\perp)$$

como $(\overline{u} \cdot \overline{u}^\perp) = 0$ por ser ortogonales, y $(\overline{u}^\perp \cdot \overline{u}^\perp) = |\overline{u}^\perp|^2 = 1$, entonces,

$$(\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u}^\perp = y'$$

$$y' = (\overline{P} - \overline{F_0}) \cdot \overline{u}^\perp = [(x, y) - (0, 1)] \cdot \left(\frac{1}{10}\sqrt{10}, \frac{3}{10}\sqrt{10}\right) =$$

$$y' = (x, y-1) \cdot \left(\frac{1}{10} \sqrt{10}, \frac{3}{10} \sqrt{10} \right) = (x) \left(\frac{1}{10} \sqrt{10} \right) + (y-1) \left(\frac{3}{10} \sqrt{10} \right) =$$

$$y' = \frac{1}{10} \sqrt{10} x + \frac{3}{10} \sqrt{10} y - \frac{3}{10} \sqrt{10}$$

Sustituyendo en $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$, se obtiene la ecuación cartesiana de la hipérbola

$$\frac{\left((\overline{P} - \overline{F}_0) \cdot \overline{u} \right)^2}{a^2} - \frac{\left((\overline{P} - \overline{F}_0) \cdot \overline{u}^\perp \right)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\left(\frac{3}{10} \sqrt{10} x - \frac{1}{10} \sqrt{10} y + \frac{1}{10} \sqrt{10} \right)^2}{\frac{5}{2}} - \frac{\left(\frac{1}{10} \sqrt{10} x + \frac{3}{10} \sqrt{10} y - \frac{3}{10} \sqrt{10} \right)^2}{\frac{15}{2}} = 1$$

Desarrollando

$$\frac{26}{75} x^2 - \frac{8}{25} xy - \frac{2}{25} y^2 + \frac{8}{25} x + \frac{4}{25} y - \frac{27}{25} = 0$$

Multiplicando por 75, ambos lados de la ecuación para no alterar la ecuación,

$$26x^2 - 24xy - 6y^2 + 24x + 12y - 81 = 0$$

La cual es la ecuación cartesiana de la hipérbola del ejemplo.

Para obtener la vectorial y las paramétricas en términos de un solo parámetro,

$$\text{Si } \begin{aligned} x' &= a \sec \theta = \frac{\sqrt{10}}{2} \sec \theta \\ y' &= b \tan \theta = \frac{\sqrt{30}}{2} \tan \theta \end{aligned} \quad ; \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$$

y sustituyendo en $\overline{P} = \overline{F}_0 + x' \overline{u} + y' \overline{u}^\perp$, se obtiene la ecuación vectorial de la hipérbola,

$$\overline{P} = \overline{F}_0 + x' \overline{u} + y' \overline{u}^\perp = (h, k) + a \sec \theta (u_1, u_2) + b \tan \theta (-u_2, u_1) / \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\overline{P} = (0, 1) + x' \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10} \right) + y' \left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10} \right) =$$

$$\overline{P} = (0,1) + \frac{\sqrt{10}}{2} \sec \theta \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10} \right) + \frac{\sqrt{30}}{2} \tan \theta \left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10} \right), \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$$

que es la ecuación vectorial de la hipérbola

Unas ecuaciones paramétricas,

$$\begin{aligned} x' &= \frac{3}{2} \sec \theta + \frac{1}{20} \sqrt{30} \sqrt{10} \tan \theta \\ y' &= 1 - \frac{1}{2} \sec \theta + \frac{3}{20} \sqrt{30} \sqrt{10} \tan \theta \end{aligned} \quad ; \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$$

Y un dibujo es:

